E.N.S.I. DE CHIMIE groupe Sud 1983

# ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES (4 h)

## I

Étant donné un nombre réel $a > 1$, $g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x(a - x) - 2 + 2\,\frac{\operatorname{ch}\left(x - \frac{a}{2}\right)}{\operatorname{ch}\frac{a}{2}}$$

et $\Gamma$ sa courbe représentative dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

*a.* Mettre en évidence l'axe de symétrie de $\Gamma$.

*b.* Trouver les points d'inflexion de $\Gamma$, et démontrer l'existence, dans l'intervalle $\left[\frac{a}{2}, +\infty\right[$, de deux valeurs de $x$ pour lesquelles $g'(x) = 0$, l'une de ces valeurs étant supérieure à $a$ (on la désignera, dans la suite, par $\alpha$).

*c.* $(u_n)$ est la suite définie par :

$$u_0 = 2, \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \operatorname{Log}\left(u_n . \operatorname{ch} 1 + \sqrt{1 + u_n^2 . \operatorname{ch}^2 1}\right)$$

Démontrer qu'elle est convergente; calculer les premiers termes de la suite jusqu'à un ordre suffisant pour obtenir une valeur approchée de sa limite avec une erreur inférieure à $10^{-2}$. Les résultats seront consignés dans un tableau.

*d.* Déduire du calcul précédent une valeur approchée du nombre $\alpha$ défini dans I.*b.*, dans le cas particulier où $a = 2$.

*e.* Étudier les variations de $g(x)$ lorsque $x$ parcourt $\left[\frac{a}{2}, +\infty\right[$, et, dans le cas particulier où $a = 2$, tracer $\Gamma$ en prenant comme unité de longueur 3 cm sur $x'Ox$ et sur $y'Oy$.

## II

On désigne par $C^\infty$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. F est l'endomorphisme de $C^\infty$ associant à toute fonction $y$ de cet espace la fonction :

$$F(y) = y'' - y,$$

où $y''$ représente la dérivée seconde de $y$.

*a.* Déterminer le noyau Ker (F) de F : préciser sa dimension, et en donner une base.

*b.* Vérifier que tout nombre réel $\lambda$ est valeur propre de F, et préciser, pour chaque valeur de $\lambda$, le sous-espace propre correspondant.

*c.* Montrer que l'ensemble :

$$D_1 = \{ y \in \operatorname{Ker}(F) / y(0) = 0 \}$$

est une droite vectorielle. Donner la fonction $y_1$ engendrant $D_1$ et telle que $y'_1(0) = 1$.

*d.* Étant donné un nombre réel $a > 0$, déduire des résultats de la question précédente l'ensemble :

$$D_2 = \{ y \in \operatorname{Ker}(F) / y(a) = 0 \}$$

Donner la fonction $y_2$ engendrant $D_2$, et telle que $y'_2(a) = -1$.

*e.* Montrer que $\{ y_1, y_2 \}$ constitue une base de Ker (F).

## III

Étant donné un nombre réel $a > 0$, on désigne par E le sous-espace vectoriel de $C^\infty$ constitué par les fonctions $y$ telles que $y(0) = y(a) = 0$.

*a.* Soit $f$ la restriction à E de l'endomorphisme F de $C^\infty$ défini dans la partie II. Bien que $f \notin \operatorname{End}(E)$, s'il existe un nombre réel $\lambda$ et une fonction $y \in E - \{0\}$ vérifiant l'égalité :

$$f(y) = \lambda y,$$

on dira, par abus de langage, que $y$ est un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda$. Trouver l'ensemble des valeurs propres de $f$, et montrer que, pour chacune d'elles, l'ensemble des vecteurs propres associés est un sous-espace vectoriel de E dont on donnera une base.

.../...

*b.* Soit $\varphi$ une fonction appartenant à $C^\infty$; $y_1$ et $y_2$ étant les fonctions déterminées dans II. *c.* et II. *d.*, démontrer l'existence et l'unicité de deux fonctions $A_1$ et $A_2$ appartenant à $C^\infty$, satisfaisant aux conditions $C_1$ et $C_2$ :

$(C_1)$ : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad A'_1(x)\, y_1(x) + A'_2(x)\, y_2(x) = 0$

$(C_2)$ : $y = A_1 y_1 + A_2 y_2 \in E / f(y) = \varphi$.

Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A_1(x)$ et $A_2(x)$ à l'aide d'intégrales.

*c.* Déduire de l'étude précédente que l'équation différentielle $y'' - y = \varphi$ a, dans l'espace E, une solution unique dont la valeur en tout point $x \in \mathbb{R}$ a pour expression :

$$y(x) = \int_0^x K(u, x)\, \varphi(u)\, du + \int_x^a K(x, u)\, \varphi(u)\, du$$

où K est une fonction réelle dont on donnera la valeur $K(u, x)$ en tout point $(u, x)$ de $\mathbb{R}^2$.

*d.* Calculer $y(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ dans le cas particulier où $\varphi$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = x(a - x)$, et donner, en utilisant les résultats du I, l'allure de la courbe représentative de la fonction $y$.

## IV

Dans cette dernière partie, on se propose de généraliser certains résultats obtenus dans la partie III.

$p$ et $q$ sont deux fonctions réelles appartenant à $C^\infty$, $p$ vérifiant, en outre, la condition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) \neq 0.$$

F est l'endomorphisme de $C^\infty$ associant à toute fonction $y$ de cet espace la fonction :

$$F(y) : x \longmapsto \frac{d}{dx}[p(x)\, y'(x)] + q(x)\, y(x).$$

$f$ est la restriction de F au sous-espace vectoriel E de $C^\infty$ défini dans III.

On suppose que $\mathrm{Ker}(f)$ se réduit à la fonction nulle, et l'on admet qu'il existe deux fonctions $y_1$ et $y_2$ appartenant à Ker (F) et vérifiant les conditions :

$(C_3)$ : $\quad y_1(0) = 0 \; ; \quad y'_1(0) = 1 \; ; \quad y_2(a) = 0 \; , \quad y'_2(a) = -1.$

*a.* Démontrer que $\{y_1, y_2\}$ est un système libre dans $C^\infty$.

*b.* Vérifier que la fonction :

$$h : x \longmapsto h(x) = p(x)\,[y_1(x)\, y'_2(x) - y'_1(x)\, y_2(x)]$$

est constante sur $\mathbb{R}$. Montrer que $h$ n'est pas la fonction nulle.

*c.* Soit un nombre réel donné $\lambda \neq 0$. K est la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$K(u, x) = \lambda\, y_1(u)\, y_2(x)$$

Montrer qu'il existe une valeur de $\lambda$ et une seule telle que, pour toute fonction $\varphi \in C^\infty$, la fonction :

$$y : x \longmapsto y(x) = \int_0^x K(u, x)\, \varphi(u)\, du + \int_x^a K(x, u)\, \varphi(u)\, du$$

soit l'unique élément de E vérifiant l'équation :

$$f(y) = \varphi.$$

*d.* Trouver, grâce au changement de fonction inconnue défini par $y(x) = xz(x)$, l'intégrale générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(3 + x^2)\, y'' + xy' - y = 0.$$

En déduire deux solutions particulières $y_1$ et $y_2$ vérifiant les conditions $(C_3)$.

*e.* Utilisant les résultats précédents, trouver, pour toute fonction $\varphi \in C^\infty$, la solution particulière $y$ de l'équation différentielle :

$$(3 + x^2)\, y'' + xy' - y = \sqrt{3 + x^2}\, \varphi(x),$$

telle que :

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y(1) = 0.$$

FIN